Université d'Orléans

OLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

Option : Spéciales P

PROBLÈME A

I

On considère la matrice :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $P(X) = \det(M_3 - XI_3)$ de la matrice M_3 (on note I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

2. Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles strictement positives (on ne cherchera pas à calculer ces racines).

3. Montrer que la matrice M_3 est diagonalisable et inversible.

II

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément f de $\mathcal{E}$, on associe l'application Φ_f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Phi_f(x, y, z) = \int_0^1 (x + yt + zt^2 - f(t))^2 \, dt.$$

1. Exprimer, sous forme d'intégrales, les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_f}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_f}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_f}{\partial z}$ de Φ_f en un point (x, y, z).

2. *a.* Montrer qu'un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ annule simultanément les trois dérivées partielles de Φ_f si et seulement si il est solution du système :

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(t)\,dt \\ \int_0^1 tf(t)\,dt \\ \int_0^1 t^2 f(t)\,dt \end{pmatrix}$$

où M_3 est la matrice de la partie I.

b. En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point, que l'on notera $A(f) = (a_f, b_f, c_f)$.

c. En étudiant le signe de la différence $\Phi_f(a_f + x, b_f + y, c_f + z) - \Phi_f(a_f, b_f, c_f)$, montrer que $\Phi_f(a_f, b_f, c_f)$ est la valeur minimale prise par Φ_f sur $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer a_f, b_f, c_f lorsque f est la fonction définie par $f(t) = \sin(\pi t)$.

III

Dans toute la suite du problème, on fixe un entier naturel $n \geqslant 3$ et on note E_{n-1} le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des fonctions polynômes de degré $\leqslant n - 1$.

1. Vérifier qu'on munit $\mathscr{E}$ d'un produit scalaire en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}, \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire, c'est-à-dire : $\forall f \in \mathscr{E}, \quad \|f\| = \sqrt{(f|f)}$.

2. Justifier que l'on peut définir, pour tout élément f de $\mathscr{E}$, la projection orthogonale de f sur E_{n-1}, que l'on notera $\Pi_{n-1}(f)$.

3. À tout élément f de $\mathscr{E}$, on associe l'application Φ_f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi_f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1} t^{n-1} - f(t))^2\, dt.$$

a. Montrer que Φ_f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$, atteint en un point unique, que l'on notera :

$$A(f) = (a_0(f), \ldots, a_{n-1}(f)).$$

b. Montrer que le n-uplet $(a_0(f), \ldots, a_{n-1}(f))$ est solution d'un système linéaire à n équations dont la matrice est :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

4. *a.* Soit $P_0, \ldots, P_{n-1}$ la base de E_{n-1} définie par $P_i(t) = t^i$.

Montrer que M_n représente la matrice sur la base $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ du produit scalaire sur E_{n-1} défini par :

$$\forall\ (P, Q) \in E_{n-1} \times E_{n-1},\quad (P\,|\,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt.$$

b. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de la matrice M_n ?

5. *a.* Montrer qu'il existe un unique polynôme T_{n-1} de E_{n-1} tel que $\forall P \in E_{n-1}$, $(P\,|\,T_{n-1}) = P(0)$, et montrer que le n-uplet des coefficients de T_{n-1} est solution d'un système linéaire à n équations dont la matrice est M_n.

b. Calculer T_2.

IV

1. Montrer qu'il existe une unique base orthonormale $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ de E_{n-1} telle que :

(i) $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, degré $(L_k) = k$;
(ii) $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(P_k\,|\,L_k) > 0$ (où P_k est le polynôme défini en **III.4.**).

2. Pour $f \in \mathscr{E}$, comment s'exprime $\Pi_{n-1}(f)$ [défini en **III.2.**] en fonction de $L_0, \ldots, L_{n-1}$?

3. *a.* Calculer L_0, L_1, L_2.

b. En déduire, pour $f(t) = \sin(\pi t)$, le polynôme $\Pi_2(f)$, et vérifier ainsi le résultat de **III.2.**

PROBLÈME B

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et on pose pour tout réel x :

$$g_\alpha(x) = \int_0^x \exp(-\alpha t^2)\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer explicitement $g_\alpha(x)$.

1. Montrer que g_α est développable en série entière au voisinage de 0 ; donner son développement en série entière et préciser le rayon de convergence.

2. *a.* Résoudre l'équation différentielle $z' + 2xz = 0$ puis $y'' + 2xy' = 0$.

   b. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

   (1) $$y'' + 2xy' = 1.$$

   Chercher une solution particulière $z = y'$ de la forme $z(x) = \lambda(x)\,e^{-x^2}$ où λ désigne une fonction dérivable (on se contentera d'exprimer la solution à l'aide d'une intégrale et de fonctions g_α).

3. Déterminer les solutions de (1) développables en série entière.

4. On pose $f(x) = (g_1(x))^2 = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$.

   a. Justifier que f est développable en série entière et préciser le rayon de convergence (on ne donnera pas explicitement ce développement).

   b. Montrer que f est de classe C^1 et calculer f'.

5. On pose pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt.$

   a. Préciser le domaine de définition de φ.

   b. Montrer que φ est de classe C^1 et calculer φ'.

   c. Montrer que pour tout réel x on a :

   $$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \exp(-x^2).$$

   d. En déduire la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

6. *a.* Montrer, en utilisant sa dérivée, que $h = f + \varphi$ est constante sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt$.

   c. Étudier les variations de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.